В заключение приведем уравнение для определения фокальных направлений

$$a_{12}\left[\Gamma_1^{42}\Gamma_2^{42}\left(\Gamma_3^{51}\omega_1+\Gamma_3^{52}\omega_2\right)^2-\left(\Gamma_3^{41}\omega_1^1+\right.\right.$$
$$\left.+\Gamma_3^{42}\omega_2\right)\left(\Gamma_3^{51}\omega_1+\Gamma_3^{52}\omega_2\right)\left(\Gamma_2^{42}+\Gamma_1^{41}\right)+$$
$$\left.+\left(\Gamma_3^{51}\omega_1+\Gamma_3^{52}\omega_2\right)^2\right]-a_{33}\left(\Gamma_1^{41}-\Gamma_2^{42}\right)\omega_1\omega_2=0.$$

Список литературы

1. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. Т.2, М., 1954.

2. Худенко В.Н. О фокальных образах многообразий многомерных квадрик.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 9. Калининград, 1978, с. 118-123.

В.П. Цапенко

СВЯЗНОСТЬ В РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С ГИПЕРКОМПЛЕКСОМ ПАР ФИГУР (P,Q)

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим пары (P,Q), состоящие из невырожденной гиперквадрики Q и неинцидентной ей точки P. Отнеся пространство P_n к подвижному реперу $R=\{A_0,A_1,\dots,A_n\}$, зададим точку P разложением $P=x^{i'}A_{i'}$ $(i',j',\dots=0,1,\dots,n)$, а гиперквадрику Q - уравнением $a_{i'j'}y^{i'}y^{j'}=0$, где

$$a_{i'j'}x^{i'}x^{j'}\neq 0,\ \det[a_{i'j'}]\neq 0 \quad \text{и} \quad a_{i'j'}=a_{j'i'}. \tag{1}$$

Не ограничивая общности рассмотрения, пронормируем координаты $x^{i'}$ и $a_{i'j'}$ так, чтобы $x^0=1$ и $a_{00}=1$. С учетом такой нормировки уравнения стационарности точки P имеют вид:

$$\Delta x^i \overset{def}{=} dx^i+x^j\omega_j^i-x^i\omega_0^0-x^ix^j\omega_j^0+\omega_0^i=0, \tag{2}$$

где $i,j,\dots=1,2,\dots,n$. Структурные формы Δx^i [1] точечного проективного пространства P_n образуют вполне интегрируемую систему. Уравнения стационарности гиперквадрики Q с учетом нормировки $a_{00}=1$ имеют вид:

$$\Delta a_{i'j} = 0,$$

где

$$\Delta a_{ij}=da_{ij}-a_{0(i}\omega_{j)}^0-a_{k(i}\omega_{j)}^k+2a_{ij}\omega_0^0+2a_{ij}a_{0k}\omega_0^k,$$
$$\Delta a_{0j}=da_{0j}-a_{0k}\omega_j^k-a_{kj}\omega_0^k+a_{0j}\omega_0^0-\omega_j^0+2a_{0j}a_{0k}\omega_0^k. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем круглые скобки в выражениях вида $a_{(i}b_{j)}$ означают удвоенное симметрирование: $a_{(i}b_{j)}=a_ib_j+a_jb_i$.

Структурные формы Δa_{ij} пространства $R(Q)$ гиперквадрик также образуют вполне интегрируемую систему.

Рассмотрим n-мерное невырожденное многообразие V_n пар (P,Q). При этом точка P описывает n-параметрическое многообразие, в силу чего формы Δx^i линейно независимы. Система дифференциальных уравнений многообразия V_n запишется в виде: $\Delta a_{ij} = a_{ijk}\Delta x^k$. Система функций (x^i, a_{ij}, a_{ijk}) является фундаментальным объектом первого порядка многообразия V_n относительно произвольного репера R.

Рассмотрим гиперплоскость L_{n-1}, полярно-сопряженную точке P относительно гиперквадрики Q. Ее уравнение имеет вид

$$b_i y^i + b_0 y^0 = 0, \qquad (4)$$

где

$$b_i = a_{ij}x^j + a_{0i}, \quad b_0 = a_{0i}x^i + 1. \qquad (5)$$

Дифференцируя первую группу равенств (5) с учетом соотношений (2) и (3), получим

$$db_i - b_j\omega_i^j + b_i\omega_0^0 + 2b_i a_{0j}\omega_0^j - b_i x^j\omega_j^0 - b_0\omega_i^0 = (a_{ijk}x^j + a_{0ik} + a_{ik})\Delta x^k. \qquad (6)$$

Произведем специализацию подвижного репера R, помещая вершины A_i в гиперплоскость L_{n-1}. В таком репере гиперплоскость L_{n-1} задается уравнением $y^0=0$, эквивалентным уравнению (4), в силу чего получим условия $b_i = 0$, $b_0 \neq 0$. С учетом этих условий найдем из (6):

$$\omega_i^0 = \Lambda_{ik}\Delta x^k \quad \left(\Lambda_{ik} = -\frac{a_{ijk}x^j + a_{0ik} + a_{ik}}{a_{0j}x^j+1}\right). \qquad (7)$$

Продолжая систему (7) дифференциальных уравнений n-мерного многообразия гиперплоскостей L_{n-1}, получим $\nabla\Lambda_{ij} \equiv 0$. Здесь и в дальнейшем символом $\equiv$ обозначаем сравнение по модулю базисных форм Δx^k, т.е.

$$\nabla\Lambda_{ij} = \Lambda_{ijk}\Delta x^k,$$

где

$$\nabla\Lambda_{ij} = d\Lambda_{ij} - \Lambda_{kj}\omega_i^k - \Lambda_{ik}\omega_j^k + 2\Lambda_{ij}\omega_0^0.$$

Базисные формы Δx^i и вторичные формы $\omega_i^j, \omega_0^i, \omega_0^0$ удовлетворяют уравнениям:

$$d\Delta x^i = \Delta x^j \wedge \{\omega_j^i - \delta_j^i(x^k\omega_k^0 + \omega_0^0) - x^i\omega_j^0\},$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k\wedge\omega_k^i + \Delta x^k \wedge \Lambda_{jk}\omega_0^i,$$

$$d\omega_0^i = \omega_0^k\wedge\omega_k^i + \omega_0^0\wedge\omega_0^i, \qquad (8)$$

$$d\omega_0^0 = \Delta x^j \wedge (-\Lambda_{ij}\omega_0^i).$$

Из этих уравнений следует, что с многообразием V_n ассоциируется главное расслоение $G_\tau(V_n)$, базой которого является область пространства P_n, описанная точкой P, а типовым слоем – подгруппа стационарности G_τ $(\tau = n^2+n)$ гиперплоскости L_{n-1}.

В главном расслоении $G_\tau(V_n)$ зададим фундаментально-групповую связность по Г.Ф.Лаптеву [2] с помощью форм связности

$$\tilde\omega_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i\Delta x^k, \quad \tilde\omega_0^i = \omega_0^i - \Gamma_j^i\Delta x^j, \quad \tilde\omega_0^0 = \omega_0^0 - \Gamma_i\Delta x^i, \qquad (9)$$

где компоненты объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_j^i, \Gamma_i\}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla\Gamma_{jk}^i + \Lambda_{jk}\omega_0^i \equiv 0, \quad \nabla\Gamma_i - \Lambda_{ji}\omega_0^j \equiv 0,$$

$$\nabla\Gamma_j^i + \Gamma_j\omega_0^i - \Gamma_{kj}^i\omega_0^k \equiv 0,$$

в которых

$$\nabla\Gamma_{jk}^i = d\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{\ell k}^i\omega_j^\ell - \Gamma_{j\ell}^i\omega_k^\ell + \Gamma_{jk}^\ell\omega_\ell^i + \Gamma_{jk}^i\omega_0^0,$$

$$\nabla\Gamma_j^i = d\Gamma_j^i - \Gamma_k^i\omega_j^k + \Gamma_j^k\omega_k^i,$$

$$\nabla\Gamma_i = d\Gamma_i - \Gamma_j\omega_i^j + \Gamma_i\omega_0^0.$$

Т е о р е м а 1. Присоединение к каждой паре фигур (P,Q) точки, не принадлежащей гиперплоскости L_{n-1}, позволяет задать связность в ассоциированном расслоении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точку B, не принадлежащую гиперплоскости L_{n-1}, зададим следующим образом $B = A + \lambda^i A_i$, где функции λ^i удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla\lambda^i + \omega^i_o = \lambda^i_j \Delta x^j, \tag{10}$$

здесь $\nabla\lambda^i = d\lambda^i + \lambda^j\omega^i_j - \lambda^i\omega^o_o$. Функции Λ_{ij} и оснащающий квазитензор λ^i позволяют охватить компоненты объекта связности по формулам:

$$\Gamma^i_{jk} = \lambda^i\Lambda_{jk}, \quad \Gamma^i_j = -\lambda^i\lambda^k\Lambda_{kj}, \quad \Gamma_i = -\lambda^j\Lambda_{ji}.$$

С л е д с т в и е. В качестве точки B можно взять точку P, тогда связность в ассоциированном расслоении возникает внутренним образом.

Т е о р е м а 2. Точка B переносится параллельно в связности Γ тогда и только тогда, когда она остается на месте.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнений (10), используя формы (9), получим: $\mathcal{D}\lambda^i = \tilde{\lambda}^i_j \Delta x^j$, где ковариантный дифференциал (см., в частности, [3]) квазитензора λ^i имеет вид:

$$\mathcal{D}\lambda^i = d\lambda^i + \lambda^j\tilde{\omega}^i_j - \lambda^i\tilde{\omega}^o_o + \tilde{\omega}^i_o,$$

а ковариантные производные выражаются по формулам:

$$\tilde{\lambda}^i_j = \lambda^i_j - \lambda^k\Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_j + \lambda^i\Gamma_j.$$

Дифференциал точки можно привести к виду:

$$dB = \tilde{\omega}^o_o B + \mathcal{D}\lambda^i A_i. \tag{11}$$

Отсюда видно, что обращение ковариантного дифференциала $\mathcal{D}\lambda^i$ в нуль характеризует параллельный перенос точки B в связности Γ, при котором она остается на месте.

Т е о р е м а 3. Подобъект линейной связности Γ^i_{jk} объекта связности Γ характеризуется проекцией на плоскость L_{n-1} смежной с ней плоскости $L_{n-1} + dL_{n-1}$ из центра B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Плоскость L_{n-1} определяется системой точек A_i. Дифференциалы точек A_i входят в состав точек, определяющих смежную плоскость $L_{n-1} + dL_{n-1}$. Они приводятся к виду: $dA_i = \tilde{\omega}^j_i A_j + \Lambda_{ik}\Delta x^k B$. Проекция плоскости $L_{n-1} + dL_{n-1}$ на плоскость L_{n-1} из центра B определяется формами связности $\tilde{\omega}^j_i$, которые в свою очередь выражаются с помощью объекта линейной связности Γ^i_{jk}.

Т е о р е м а 4. Проекция на точку B смежной с ней точки $B + dB$ из центра L_{n-1} характеризует подобъект Γ_i объекта связности Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы вытекает из соотношения (11).

Список литературы

1. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве.-В кн.: Труды геом. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1973, с.71-120.

2. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Г.Ф. Лаптева.-В кн.: Труды геом. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1973, т.4, с.7-70.

3. Ш е в ч е н к о Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.12, Калининград, 1980, с.126-130.